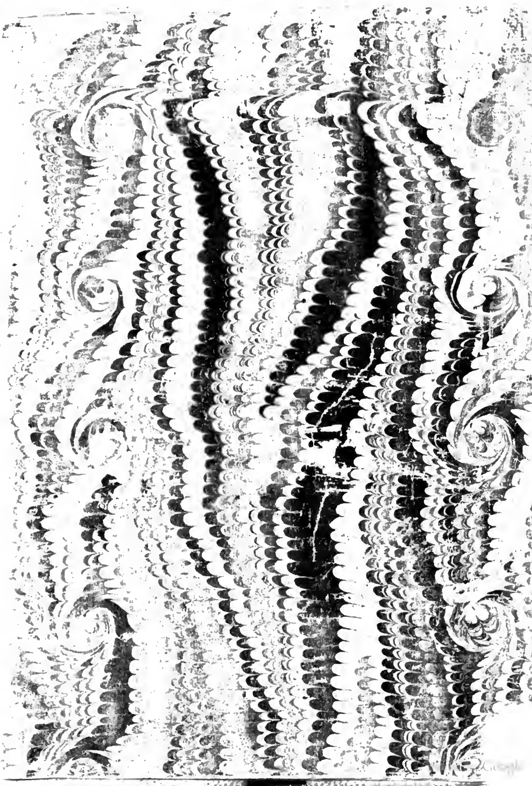
B. N. C.
FIRENZE
1051
2

Digitized by Google

·S1·2

Digitized by Google



4034 2

Digitized by Google

1051 2

Digitized by Google

Digitized by Google

PROSTASIS
AD EXCEPTIONES
CL. VARIGNONII
LIBRO DE INFINITIS
INFINITORUM ORDINIBUS
OPPOSITAS

Circa magnitudinum pluſquam-infinitarum Vallíſii Defenſionem, & anguli contactus, cum infinitè parvo ad centrum oſculantis circuli conſtituto, Comparationem.

AUCTORE

D. GUIDONE GRANDI CAMALDULENSI,

M. D. Hetruriæ Theologo, & Mathematico, in Piſana Univerſitate Phil. Pub. Profeſſore,

REGIÆ SOCIETATIS SODALI.

PISIS, MDCCXIII.

Ex Typographia Franciſci Bindi Impreſſ. Archiepiſc.

SUPERIORUM PERMISSU.

1878

1051.2

Digitized by Google

EX actis Lypſiæ menſis Aprilis 1712. mihi per amicum communicatis, Clariſſimum Varignonium erga me ſubiratum intelligo, quaſi totam Regiam Societatem in eum concitare conatus ſim, ac prope mihi exprobrantem audio, quòd Phantaſma è cerebro meo cuſum, non autem genuinam ejus doctrinam Valliſio oppoſitam, impugnaverim. Ego verò, cum meam erga ipſum Varignonium obſervantiam, etiam dum ab ejus ſententia diſſentirem, ſatis expreſſerim *pag.* 19. libri mei *De Infinitis Infinitorum ordinibus*, præclariſſima ejuſdem erga univerſam Matheſim merita cum laude commemorans, quibus nihil detractum volebam, dum Valliſium ab ejus oppoſitionibus vindicarem, unius veritatis amore, non eidem contradicendi ſtudio, incenſus, quemadmodum & *pag.* 76. ad calcem operis abundè confirmavi, quanti apud me ponderis ejuſdem eſſet auctoritas ultrò ſignificans, ſuperfluum jam duco, animi mei candorem apud æquos Lectores uberiori ſenſum meorum ſignificatione purgare, aut ampliora venerationis meæ erga celeberrimum Virum Teſtimonia proferre; Sed ad quæſtionem apud nos excitatam propius accedens, uter noſtrum meræ Logomachiæ titulo certaverit, manifeſtare conabor: quamquam ex jis, quæ dudum *artic.* 7. *ſexti Diarij Veneti* a me dicta ſunt (a quibus jam hic repetendis conſultò abſtinebo) res ſufficienter deciſa videri poſſet,

 niſi

niſi Vir idem Clariſſimus illis minimè acquieſcens, ſibi per me uberius ſatisfieri poſtularet.

2. Varignonii ſcriptum *in Monumentis Regiæ Academiæ* 3. *Februarii* 1706. totidem ejus verbis latinè redditis ſic habet: *D. Vallis menſuram inquirens Spatiorum, quæ ab hyperbolis, & aſymptotis ſuis comprehenduntur, cum pro expreſſione nonnullorum ejuſmodi ſpatiorum negativas magnitudines inveniſſet, eadem pluſquam infinita credidit. At quandoquidem hoc quod eſt pluſquam infinitum, ſemper mihi viſum fuit contradictionem involvere, id me impulit, ut enodationem hujus myſtrii inquirerem, quod planè evaneſcet, ubi oſtendero, id quod ab hoc Auctore pro expreſſione ſpatii pluſquam infiniti accipitur, nequidem ſpatium abſolutè infinitum eſſe, ſed planè finitum, quod tamen reverà complementum ſit ſpatii infiniti; atque adeò hyperbolas, & ipſarum aſymptotos haudquaquam comprehendere ſpatia pluſquam infinita, ut hic Auctor credidit.* (1.)

3. Ex hoc paragrapho tres diſtinctas quæſtiones excitari poſſe video: duas de re, tertiam de nomine. Prima eſt, an ſpatia, quæ D. Vallis conſideravit ſint merè finita, & tantùm complementa quædam ſpatiorum ſimpliciter, & abſolutè infinitorum, ut Varignonio viſa ſunt; an verò uſque adeò infinita ſint, ut ipſiſmet ſpatiis arearum hyperbolæ primæ Apollonianæ (ad quam naturali quodam ordine referri intelliguntur) licèt jam abſolutè infinitis, ſint infinities majora, adeò ut ad hæc ipſa comparari queant, ut infinitæ magnitudines ad finitas, quemadmodum cer-

(1.) Monſieur VVallis cherchant la meſure des Eſpaces renfermez par des hyperboles & leurs aſymptotes, & aiant trouvè pour l'expreſſion de quelquesuns de ces Eſpaces des grandeurs negatives, a crù qu'ils etoient plus qu'infinis. Mais comme un plus qu'infini m'a toujour parù renfermer une contradiction, cela m'a determinè à chercher le denouement de ce myſtere, qui ceſſera d'en etre un, des que j'aurai fait voir que ce que cet Auteur prend pour l'expreſſion d'un Eſpace plus qu'infini n'eſt pas meme celle d'un infini, mais ſeulement d'un Eſpace fini, qui eſt à la veritè le complement d'un Eſpace infini; & qu'ainſi les hyperboles & leurs aſymptotes ne renferment point d'Eſpaces plus qu'infinis, comme cet Auteur l'a pretendu.

certè Vallißius credidit, atque ego demonſtravi; & nunc tandem ipſe Varignonius mecum recognoſcere jam non dubitat in ſuo ſcripto Apologetico? Secunda quæſtio eſſe poteſt, an legitimo argumento Vallißius tam enormem ejuſmodi hyperbolicorum ſpatiorum menſuram ex negativis expreſſionibus, eorum indices referentibus, deduxerit; an verò inde areas potius finitas, inverſo dumtaxat ſitu ad oppoſitam ordinatæ partem jacentes, colligere debuiſſet? Tertia an ejuſmodi infinitæ magnitudines, quæ aliis adhuc abſolutè infinitis ſint infinities majores, quatenus tales, idoneo vocabulo *Pluſquam-infinitæ* dici mererentur?

4. Ego poſtremam hanc quæſtionem, utpotè indignam, quæ à Viris Mathematicis ſeriò agitetur, planè non attigi, neque adeò mirum eſt, quòd *Pluſquam-infiniti* nomen à Cl. Varignonii exceptionibus non vindicaverim, cum ipſe præſertim nondum apertè propoſuiſſet, in quo conſiſteret contradictio, quæ ſibi videbatur illo vocabulo involvi. Nunc verò quoniam explicatius ſcrupulum ſuum expoſuit, ſubtiliter animadvertens, quòd *ſi qua eſſent pluſquam infinita* [juxtà etymologiam nominis ab ipſo conceptam] *omnem traſgrederentur extenſionem, infiniti definitione comprehenſam, ac proinde cum ipſa infiniti, utpote inexhauſtibilis, natura pugnarent; Siquidem nihil omnium rerum eſt pluſquam quod ſua definitione continetur*. Patiatur, obſecro, Vir Cl. ſibi reponi, quòd *pluſquam infinita*, de quibus cum Vallißio loquimur, excedunt quidem omne Infinitum inferioris gradus, ſed non omne abſolutè infinitum: unde non ſunt quiddam pluſquam ſua ipſorum definitione comprehenſum, ſed pluſquam quod comprehenditur definitione infinitorum ſimpliciter talium. Nimirum duplicem veluti reſpectum involvunt *Pluſquam infinita*; alterum communem cuilibet infinito reſpectivo generatim accepto, quatenus connotant aliquas magnitudines, quas infinities excedunt, ideſt ultra omn[illegible]oportionem: alterum verò

ſibi

ſibi proprium, & ſingularem, quo denotant has ipſas magnitudines, quas præfato modo excedunt, eſſe ſimpliciter infinitas, ſive eaſdem iterum ſuperare quamlibet finitam magnitudinem ultra omnem proportionem. Quemadmodum etiam ſecundæ differentiæ, ſive infinitè parva ſecundi gradus, duplicem pariter involvunt reſpectum, quorum altero infinities ſuperari ſignificantur ab alia quantitate, ut generatim omnibus infinitè parvis reſpectivè acceptis convenire debet: altero autem ſpecialius innuitur, ipſammet quantitatem, a qua ſic ſuperantur, eſſe adhuc infinities minorem qualibet finita, ſive ordinaria magnitudine.

5. Unde evaneſcit omnis repugnantia quam Vir Cl. in hoc termino apprehendit; Veram enim, & ipſiuſmet confeſſione realem notionem, unius infiniti alio infinities majoris, cur non permittat peculiari hoc vocabulo ſignificari? Aut cur ſatis congrua hujus ideæ expreſſio ipſi videatur, ſi quis quantum aliquod majus infinito dixerit, ſecus autem ſi pluſquam infinitum nominaverit? Gallicæ fortaſſis loquelæ elegantia eam phraſim non feret, cui nos Itali jam inde a vetuſtiſſimis temporibus aſſuevimus: Nam, cum celeberrimus Cardinalis Petrus Bembus inter primarios linguæ noſtræ illuſtratores ſumma cum auctoritate ſpectabilis, in colloquiis ad Aſulum caſtrum compoſitis, ſub initium libri ſecundi expreſsè notaſſet, ex univerſis quidem hominibus *infinitos* reperiri, qui aureis, ſericis, gemmeiſque ornamentis corpus tegere, ac decorare contendunt; at *longè pluſquam infinitos* eos eſſe, qui vel ſolidis virtutibus animum induere, vel aliqua ſaltem honeſti ſpecie velare penitus negligunt; [1.] interpres Gallicus ejus tractatus Joan-

[1.] Perciocchè niuno è coſì vile, che la ſua perſona d' alcuno veſtimento non ricuopra, & infiniti ſono coloro, che nelle lucide porpore, e nelle dilicate ſete, e nell' oro iſteſſo cotanto pregiato faſciandola, e delle più rare gemme illuſtrandola, così la portano, per più di grazia, e più d' ornamento le dare: dove ſi veggiono tutto 'l giorno [illegible] *più che infiniti* di quegli uomini, è quali la lor mente non ſolo d[illegible] e ſode virtù non hanno veſtita, ma pure d' alcun velo, o filo di [illegible]ſtume non tengono, ne ricoperta, ne adombrata.

Joannes Martinus, qui juſſu Aurelianenſis ducis verſionem Bembi ſuperiori ſæculo adornavit, antequam ad politiorem formam, qua nunc viget, hæc lingua redigeretur, verba illa *vie piu che infiniti* declinans, in aliam phraſim ſenſum ipſum detorſit: (2.) At ſi quid adverſus hunc dicendi modum, aut gallicæ linguę uſus, aut Varignonii exceptiones valerent, nec Dantem Etruſci probarent *Filoc. lib.* 4. ſcribentem *più giù dell' infima parte*, nec F. Jordanum aſſerentem *più bianchiſſimo*, nec Grammatici [quos maximè tangit hæc controverſia) ſua *præterita pluſquam perfecta* tueri poſſent, nec Joannes Baptiſta abipſomet Veritatis ore vocari jure debuerat *pluſquam Propheta*, nec toleranda forent apud Lucanum „ *Bella per æmathios* pluſquam civilia *campos*; Et ſic de aliis, quæ non ſunt a me hic ſeriò inculcanda, cum mihi ſufficiat vocabulum, de quo quærimus, a me inventum non eſſe, ſed a clariſſimis Viris, quos in opuſculo meo ad *def.* 7. citavi, acceptum, & ad has ipſas magnitudinum claſſes, de quibus ego cum Valliſio loquor, ſignificandas, uſurpatum: & *pluſquam ſatis* eſſe poſſet ad ejuſdem vocabuli ſenſum commendandum, quod apprimè congruat magnificæ expreſſioni, qua *Dominum in æternum, & ultra regnaturum* Moſes in ſacro ſuo Epinicio *Exodi c.* 15. celebravit.

6. Sed & ipſa *Pluſquam-infiniti* deſcriptio, quam in recenſenda Varignonii hac de re Diatriba, ipſomet approbante, Illuſtriſſimus, & Doctiſſimus ejuſdem Collega Fontanellius expoſuit, nedum evincit, nullam in hoc vocabulo contradictionem involvi, ſed idipſum prorſus ſignificare dignoſcitur; quod a me in *def.* 7. expreſſum fuerat, &, eodem

(2.) Qu'il n'y a vivant (tant ſoit il de baſſe condition) qui ne taſche à garnir ſon corps de quelque converture, & què ceux, qui en ont meilleur moyen, y employent non ſeulement les pourpres & ſoyes delicates, mais (qui plus eſt) l'or & les pierres precieuſes, pour luy donner plus de grace & authorité entre les hommes: & encore qu'ilz ſentent leurs eſpritz denuez de toutes vertus & coſtumes louables, ſi eſt ce *que peu d'entreux* ſe mettent en peine de les orner d'un ſimple voile de bonté: *Jean Martin. loc. cit.*

eodem Varignonio fatente, in decurſu libri eſt ſolidis argumentis demonſtratum; ait enim elegantiſſimus hiſtoriæ academicæ ſcriptor. *Id, quod pluſquam Infiniti nomine venit, non eſſe magnitudinem utcunque alia infinita majorem, cum infinitæ magnitudines, juxta quorumvis numerorum rationes; aliæ aliis majores, aut minores eſſe poſſint, abſque eo, quod eundem infinitorum ordinem tranſcendant* (ut ipſemet demonſtravi *prop.* 7.) *perinde ac finitæ quantitates juxta quamlibet rationem auctæ, vel imminutæ; finitorum ordinem haud quaquam tranſcendunt; Sed Pluſquam infinitarum magnitudinum nomine venire tales magnitudines, quæ ab infinitorum ordine emergentes ad ordinem ſuperiorem eleventur, ut finitis magnitudinibus accidit, ubi ad ordinem infiniti tranſierint.* (1.) Quod ipſum ego *prop.* 8. & 9. in multis caſibus evenire de facto demonſtravi.

7. Hæc utique *pluſquam infiniti* deſcriptio, a Varignonio recognita, ad amuſſim quadrat infinito ſuperioris ordinis a me demonſtrato; unde non video, cur excipiat Vir Cl. aliud *Pluſquam infiniti* genus a me oſtenſum, quamquod ipſe in Valliſianis hyperbolis impugnandum ſuſceperat, juxtà notionem Fontenellii calamo elegantiſſimè expreſſam. Aut enimverò fateri debet, mancam, & imperfectam eſſe ejuſmodi deſcriptionem, ſi aliud quidpiam *pluſquam infiniti* nomine intelligendum eſſe contendit: aut oſtendere tenetur in quo diſſideat ab idea *pluſquam infiniti* per me propoſita, dum *def.* 7. hypotheticè dixi. *Si quæ magnitudines infinities majores oſtendantur* (& non tantum juxta quamlibet finitam rationem, quæ numeris convenire poſſet) *aliis magnitudinibus jam abſolutè infinitis, adeò-*

que

(1.) Car ce qu'on nomme ici plus qu' infini, ce n' eſt pas une grandeur infinie plus grande qu' une autre infinie; les grandeurs infinies peuvent etre plus grandes ou plus petites les unes que les autres, ſelon tous les rapports poſſibles des nombres, & cela ſans ſortir de l' ordre de l' infini, de même que les grandeurs finies ne ſortent pas de l' ordre du fini pour varier entr' elles ſelon tous ces rapports. Mais ce qu' on entend par des grandeurs plus qu' infinies, ce ſont des grandeurs qui etant ſorties de l' ordre de l' infini doivent s' elever à un ordre ſuperieur, comme font les grandeurs finies lorſqu' elles paſſent à l' ordre de l' infini.

que ordinis ſuperioris ad ipſas prolentur (pari ſcilicet ratione, qua ſuperioris ordinis ſunt infinita quælibet reſpectu finitorum) *illæ pluſquam infinitæ poterunt appellari*. Omnes utique conditiones a Fontenellio requiſitæ ad *Pluſquam Infiniti*, de quo erat controverſia, ideam aliquam excitandam, hac noſtra definitione, juxta ſenſum præcedentium expoſita, comprehenſæ abundè videntur; quare ſi locis citatis ejuſmodi *Pluſquam-Infinitorum* exiſtentiam a me demonſtratam Adverſarius agnoſcit, cur aliud a me probatum eſſe ſuadere nititur, quam quod in quæſtione poſitum fuerat?

8. Nec ſufficit excipere (quæ jam Varignonii eſt evaſio) quod quemadmodum finitæ magnitudines ad Infiniti ordinem non elevantur, niſi *cum finitarum quarumlibet limites ſunt tranſgreſſæ*, ita etiam *pluſquam-infinitæ* cenſendæ non ſunt, juxta ſenſum Fontenellianæ deſcriptionis, niſi *cum ultra quarumlibet infinitarum extenſionem (ſi id fieri poſſet) aſſurrexerint*. Nam in primis nuſquam Fontenellius expreſſit, *quaslibet* infinitas magnitudines (etiam ſcilicet illas, quæ non modo juxtà quamcumque finitam numerorum rationem, ſed adhuc *infinities*, & ultra omnem rationem aſſignabilem, ſuperant alias jam abſolutè infinitas) ſuperari debere ab ea, quæ *pluſquam-infinita* conciperetur: ſed tantum elevandas eſſe pronunciavit infinitas magnitudines ad ordinem *uſque adeò infinito ſuperiorem*, *quemadmodum finitæ magnitudines ad ordinem emergunt ſuo gradu ſuperiorem, quando jam infinitæ evaſerint*. Id quod optimè ſalvatur, admiſſa diverſitate ordinis inter ipſamet infinita, qualis admitti ſolet inter infinitè parvas quantitates; perinde enim infinitum aliquod m abſolutè tale, majus eſt finita quantitate x, ut hæc major eſt, quam dx, atque hæc rurſus major quam ddx &c. decreſcendo deinceps ad ulteriores differentias; & ſimiliter perinde ac finita quantitas x minor eſt magnitudine m ſimpliciter infinita

nita, poteſt hæc ipſa concipi minor, quàm alia quantitas *n pluſquam-infinita*, & hæc, eadem ratione, minor alia ſuperiori quantitate *p*; atque ita ſemper creſcendo [quæ quidem *pluſquam-infinitæ* quantitates, accepta finita *x* pro unitate, optimè exprimerentur per varias ipſius *m* poteſtates m^2, m^3, m^4 &c. ſicut ulteriores differentiæ per varias ipſius *dx* poteſtates exprimi poſſent, ſcilicet dx^2, dx^3, dx^4 &c.] in quibus utique verificatur quidquid a Fontanellio exigitur ad notionem *pluſquam-infiniti* complendam, ut ejus verba præciſa ad aliquod ex prædictis infinitis altiorum ordinum applicando, patere poteſt.

9. Secundò, ſi Fontanellii verba juxtà Varignonii interpretationem exponenda ſint, ut nempe *pluſquam-infinitum* intelligi debeat ultra omne cujuſvis gradus infinitum aſſurgere, ergo infinitorum Claſſis, quam tranſgredi deberet *Pluſquam-infinitum Varignonianũ*, nedum comprehendet Infinita, *quaſlibet relationes numerorum* (juxtà phraſim Cl. Fontanellii) *inter ſe habentia*, ſed amplius, quæ inter ſe rationem ſubeane finiti ad infinitum, etiam ut libuerit multiplicatam; cujuſmodi nulla eſt, quæ finitis magnitudinibus inter ſe comparatis, aut ullis numerorum expreſſionibus competere poſſit: atque idipſum potius, *quod finitis magnitudinibus accidit ubi ad ordinem infiniti tranſierint*, ut loquitur Fontanellius, dicendum erit competere magnitudinibus infinitis intra eundem infinitorum ordinem exiſtentibus, non autem illis *ad ſuperiorem ordinem elevatis, & ab ordinaria infinitorum Claſſe emergentibus* ut magnitudinum *pluſquam-infinitarum* nomen, & eſſentiam obtineant; quomodo ergo ſecum ipſe conſentiret Illuſtriſs. Fontanellius, dum loco jam ſupra laudato dixit: *Pluſquam-infinitarum magnitudinum nomine venire magnitudines, quæ ab infinitorum ordine emergentes, ad ordinem ſuperiorem eleventur, ut finitis magnitudinibus accidit, ubi ad ordinem infiniti tranſierint?* Hæc ſanè verba cum ſuperioribus juncta, in

qui-

quibus aſſeruit, *infinitas magnitudines quamlibet ſuſcipere poſſe inter ſe relationem numeris explicabilem, abſque eo, quod eundem infinitorum ordinem tranſcendant*, & tanto conſequenter *Pluſquam-Infinitæ*, mihi viſa ſunt ſatis indicare evidenter, quod *Pluſquam-Infinitum* ab eloquentiſſimo Hiſtorico expreſſum, abundè ſuo nomini reſpondebat, excedendo infinitum ultra omnem proportionem aſſignabilem, etiam ſi non excederet quoslibet infinitorum ordines, eos nempe, qui ad invicem referuntur juxta eam altiorem habitudinem, qua infinitum cum finito comparatur. Præſertim cum in *articulo geometrico de viribus centrifugis in hiſtoria anni* 1710. *pagin. mihi* 111. idem Cl. Fontenelle recenſens ea de re Varignonii meditationes; de infinitis primi gradus verba facit eodem prorſus modo, quaſi libet numeroſas relationes in illis reperiri animadvertens, ac nunc de rationibus inter Infinita verſantibus loquatur; unde ſicut eo loci non comprehendit utique *infinitè parva ſecundi, aut tertii gradus*; [1.] ita neque hic, ſimilibus verbis ſe exprimens, loqui cenſendus erit de *infinitis altiorum ordinum*, quaſi hæc etiam a *pluſquam infinitis*, de quibus erat quæſtio, ea phraſi ſecerneret.

10. Neque verò terrere nos debet ſcrupulus, per novum *inexhauſtibilis* vocabulum, a Varignonio excogitatus, dum inquit, *nihil eſſe poſſe pluſquam inexhauſtibile, adeoque nec pluſquam-infinitum*. Vereor enim, ne magna in hoc nomine *exhauſtionis* lateat æquivocatio. Cum dicitur, *infinitum exhauriri non poſſe*, ſubintelligi debet, *per quotlibet numero finitas quantitatis finitæ acceptiones*: aliàs quis neſciat, vel infinities indè ſumendo finitam quantitatem, vel aliquot vicibus inde quantitatem infinitam detrahendo, veluti ter accepto ipſius triente, aut bis ejus medietate

B (quan-

(1.) Les infiniment petits (de même genre, *ut ait infra*) ont entre eux les mêmes rapports que les grandeurs finies, l'un peut eſtre double, triple &c. d'un autre. *Hiſt.* 1700. *artic. Geom.*

(quandoquidem has finitas rationes Varignonius ipſe cum Fontenellio expreſsè in infinitis admittit) aut ſemel denique toto ſublato, exhauriri utique poſſe quodlibet Infinitum? Siquidem igitur magnitudo quædam offeratur, ex qua quotlibet vicibus ſumendo quantitatem aliquam etiam [illegible] infinitam, inferioris tamen ordinis, adhuc nequeat exhauriri, cur non *magis inexhauribilis* intelligi poſſit, ac dici debeat, quàm illa, ex qua duntaxat finitam quantitatem quotlibet vicibus, citra exhauſtionem, accipere liceret; non ſic verò accipiendo prædicti ordinis infinitam, cujus aliquot vicibus repetita detractio quantitatem ipſam propoſitam ad nihilum brevi redigeret?

VI. Sanè, quemadmodum magis incommenſurabiles ſunt lineæ, quæ tum longitudine, tum potentia, vel etiam cubo, aut ſuperiori aliquo gradu, incommenſurabiles ſunt, quàm illæ, quæ tantùm longitudine ſunt incommenſurabiles, quia etſi nulla communis menſura tam his, quam illis conveniat, aliqua tamen menſura ſuperficialis ipſarum quadratis, vel menſura ſolidæ extenſionis earum cubis invicem arithmeticè conferendis deſervire poteſt; adeo ut non incongruè *pluſquam incommenſurabiles* dici poſſent circumferentia, & diameter ejuſdem circuli, quando oſtenderetur, nedum nullam eſſe menſuram communem ipſarum longitudinibus (ut nulla eſt diametro circuli, & inſcripti quadrati perimetro) ſed nec ullam communem menſuram eſſe ipſarum quadratis [ut nulla eſt quadratorum a diametro circuli, & perimetro inſcripti octogoni] nec etiam ullam communem menſuram earundem cubis (ut nulla eſt cubo diametri, & perimetri figuræ 16. laterum circulo inſcriptæ) atque ita deinceps. Ita nullum mihi abſurdum planè videtur, nec Priſcianus ipſe, ſi viviveret, ullum fortaſſe ſcrupulum ſuper hoc nobis moveret, ſi magnitudines, quæ nedum exhauriri nequeunt per quotlibet finitas portiones inde ſubtractas, ſed ne quidem

per

per quotlibet infinitas inferioris ordinis inde acceptas, & *pluſquam inexhauribiles, & pluſquam infinitas* diceremus; imò ſatis aptam, & commodam ejuſmodi appellationem quivis nullo partium ſtudio præoccupatus jure cenſebit. Nec ipſemet Illuſtriſs. Fontenellius ab hac appellatione abhorrere poteſt, qui ſimili expreſſione ſolarem Eclypſim, quæ *totalis cum mora* dici ab Aſtronomis conſuevit; *Pluſquam-totalem* non eſt veritus appellare in *Actis reg. Acad.* 1699. *in artic. Aſtronomico de obſervation. Eclypſ. pag. mihi* 94. his verbis: *Si le diametre apparent de la Lune eſt le plusgrand, l'Eclipſe eſt pour ainſi dire PLUS QUE TOTALE.* Cum tamen videri poſſit, & debeat non minus incapax hujus auxeſeos vox *Totius*, quam vox *Infiniti*.

12. Cæterum, an ipſemet Varignonius jure *Infiniti* nomen abſtulerit quantitatibus mediis inter finitam, & ſimpliciter Infinitam, ut a ſe in monumentis anni 1710. factum refert, nihil pronunciare auſim, cum ad manus meas nondum anni illius commentaria pervenerint, ut ejus rationes diſpicere poſſim. Tantum addo, me in ipſo Libro *De Infinitis, &c. pag.* 28. ſatis prævenifſe difficultatem, quam obiicit de Infinito primi gradus ad ſecundum migrante, ob interpoſitam dicto Infinito, & quantitati cuidam finitæ mediam proportionalem magnitudinem; Expreſsè enim dixi *loc. cit.* ad tam obvium ſcrupulum removendum; *Quodlibet Infinitum poſſe adhuc pluſquaminfinitum cenſeri, quia cum nullus ſit minimus infiniti gradus, quolibet Infinito propoſito, ſemper aliud infinities minus reperiri poteſt, cujus reſpectu illud ſit pluſquam-infinitum;* quod & demonſtravi *prop.* 10. *pag.* 63. & 64. oſtendens & ipſe aream infinitam ipſo aſymptotico ſpatio hyperbolæ Apollonianæ infinities minorem. Nihil ergo repugnat, ut infinitum primi gradus jam ſecundi, aut tertii habeatur, cum hæc nomina reſpectiva ſint; itaque ſi ſpatium quoddam infinitum referatur immediatè ad finitum, ſive ordinarium, ſub tali

conſideratione eſt primi gradus; ubi verò refertur ad aliud infinitum ipſo infinities minus, evadit gradus ſecundi, quia terminus relativus jam conſideratur in gradu primo infinitatis.

13. Simile quid evenit in infinitè parvis. Primæ differentiæ dicuntur reſpectu finitæ quantitatis, ſecundæ verò reſpectu primarum differentiarum, & tertiæ relatè ad ſecundas; atque ita deinceps. Si in Parabola infinitè parvam axis portionem vertici proximam quis determinaverit, erit hæc differentia prima reſpectu axis finiti. Si ordinatam vertici infinitè proximam inde quis duxerit, hæc [utpote media proportionalis inter prædictam differentiam axis, & parametrum] jam primum differentiarum gradum occupabit, & conſequenter illa de primo ad ſecundum devolvetur. Quemadmodum ergo hæc ordinata infinitè parva immeritò ab ordine infinitè parvorum excluderetur, quia media ſit inter finitam, & infinitè exiguam differentiam axis: ita etiam quælibet ordinata *y* media inter eandem finitam quantitatem parametri, & infinitum axem Parabolæ *x*, abſque ulla convincenti ratione, ab Infinitorum claſſe deturbatur. Hæc omnia ſiquidem è principiis calculi infiniteſimalis ſpontè profluunt; neque ulla mihi in his admittendis difficultas ſpecialis occurrere poſſe videtur, quæ non ſit cum incomprehenſibili *Infiniti* natura neceſſariò conjuncta, & ab ea penitus inſeparabilis; adeoque, quo ſenſu tam infinitè magna, quam infinitè parva ſemel admittuntur, hæc omnia conſectaria recipi debent, & tanquam veriſſima, licet fortaſſe non ita explicatu facilia, retineri.

14. Quod attinet ad primam quæſtionem ex tribus ab initio jam *num.* 3. propoſitis: vix ullus controverſiæ locus relictus videtur, ex quo ipſemet Varignonius apertè fatſus eſt areas hyperbolicas ex ipſis, quas Valliſius conſideravit, eſſe alias aliis infinities majores, hoc eſt ad ordinem

dinem ſuperiorem infinitatis pertinere, quam pertineat hyperbola ordinaria, licet illas idcircò *pluſquam infinitas* appellandas non putet: Quod parum refert, ſi ad hoc controverſiæ caput reſpiciamus, quod de re eſt, ut monuimus, non de voce. Interim quippe conſtat, ipſum Varignonium nimis præfidenter in ſcripto ſuo anti-Vallíſiano pronunciaſſe, quod *hyperbola Apolloniana potiori jure magis infinita dici deberet, quam Vallíſiana hyperbola, eo quod illa ſpatium utraque ſaltem ex parte infinitum exhibeat, hæ verò una duntaxat ex parte infinitum, ex alia finitum preferant: tantum abeſt, ut pluſquam infinitæ cenſeri debeant.* (1.) Multoque autem non ita clarè varietatem ordinis infinitorum, in formulis valoris areæ hyperbolicæ per ipſum Varignonium aſſignatis, perſpecturos eſſe ſcio, ac in apodicticis demonſtrationibus noſtris; præſertim cum ſuppoſita x infinito, ejus poteſtas ab exponente $\frac{n}{m+n}$ indicata nunquam unam integram dimenſionem præſeferre poſſit, propter denominatorem majorem numeratore; unde fruſtra ſibi perſuadet Varignonius ex ejuſmodi formulis ſponte profluere infinita ordinis ſuperioris ad illud, quod ſimpliciter, & abſolutè infinitum unius dimenſionis conciperetur; quanquam fatear, infinita multa diverſorum ordinum intermediorum, inter finitum, & infinitum unius dimenſionis (quæ Clariſs. Auctori ab Infinitorum claſſe excludenda videntur) hinc proditura; nam pro vario valore numerorum n, m, poſito x infinito foret $x^{\frac{n}{n+m}}$ aliqua ex mediis proportionalibus inter finitum, & ſimpliciter infinitum unius dimenſionis.

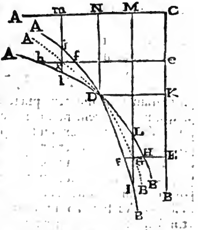
15. Tantum video, excipere poſſe Varignonium, quod

hæc

(1) D'où l'on voit que l'eſpace A C B B G A (hyperb. Apollon.) doit etre infini de part, & d'autre; & par conſequent plus infini (pour ainſi dire) que les precedens A C B B F A, & A C B B H A qu'on vient de voir ne l'etre que par chacun un coté. Donc il s'en faut bien qu'ils ne ſoient plus qu'infinis:

Digitized by Google

hæc altior infinitas in hyperbolis Valliſianis a me aſſerta, & demonſtrata, atque ab ipſo recognita, unam duntaxat talium hyperbolarum partem reſpiciat, non verò alteram, quæ finitæ prorſus menſuræ invenitur, & ad quam Cl. Adverſarius prætendit debuiſſe Valliſium ſuas expreſſiones indicis negativi accomodare; ſiquidem ſe oſtendiſſe putat, *id quod ab hoc Auctore pro expreſſione ſpatii pluſquam infiniti accipitur nequidem abſolutè infinitum ſpatium eſſe, ſed planè finitum, quod tamen reverà complementum ſit ſpatii infiniti*. At rogare auſim acutiſſimum virum. Expoſita hyperbola ADFB inter aſymptotos AC, CB, cujus ordinatæ DK, FE juxta poteſtatem aliquam, ab indice *pluſquam-unius* (verbum excidit: *multiplicis*, ſive ſaltem *utcumque majoris*, dicere volueram) dimenſionis denominatâ, acceptę reciprocè ſint ut abſciſſæ ex aſymptoto EC, CK. Nonne ducta DN aſymptoto parallela, docuit Valliſius *prop.* 104. *Arithmet. Infinitor.* aream hyperbolicam DNCEBF ad partes *B* altiorem infinitatem, ſive ut ipſe loquitur, *pluſquam-infiniti* gradum continere? Et *prop.* 105. nonne expreſsè aſſeruit, ad alteram partem ejuſdem hyperbolici ſpatii DNAf, jacere aream finitam, & limitatam, juxtà menſuram, quæ ab ipſo legitimè definitur? Ergo dum Varignonius ejuſmodi areas ex una parte finitas, & quidem ex ipſamet parte A, ex qua Valliſius earum menſuram aſſignat, ac tantummodò infinitum eſſe reliquum ſpatium ad partem B excurrens,



&

& quidem ſuperioris ordinis infinitatem obtinere conſentit, ubi Vallíſius *pluſquam-infinitam* aream jacere pronunciavit, nihil planè Vallíſianis placitis, niſi verbo tenus contrarium Varignonius demonſtrat; Sed quod ille finitum jam dixerat hic pariter finitum adſtruit; & quod ille infinitatem altiorem præſeferre credidit, hic pariter ejuſdem ſuperioris gradûs infinitatem obtinere [ſecluſo duntaxat *pluſquam-infiniti* vocabulo, quod odio *pluſquam Variniano* proſequitur] minimè diffitetur; Quare extra reprehenſionem poſitus eſt Vallíſius, nec de ipſo verè poterat à Varignonio pronunciari: *Spatium ab hoc Auctore pro area pluſquam infinita deſignatum, nequidem ſimpliciter infinitum eſſe, ſed tantum finitum.*

16. At, inquiet Clariſs. Adverſarius, in hoc ipſo lapſum eſſe Vallíſium, quòd expreſſionem indicis negativi ad hanc areæ hyperbolicæ partem retulit, quæ verè infinita eſt, gradus etiam ſuperioris ad ordinariam hyperbolam; cum potius retrocedere debuiſſet ad alteram partem areæ, illius finiti valoris deſignandam, juxtà conſuetudinem quantitatum negativarum, quæ ad ſitum oppoſitum referendæ ſunt, non pro magnitudinibus nihilo minoribus habendæ, ut nimis abſurdè Auctor noſter interpretatus eſt, hinc ſuam *Pluſquam-infinitorũ* idæam procudens. Sed enim hoc jam ad ſecundam è quæſtionibus ab initio recenſitis, pertinere videtur; juxtà quam ambigitur, an jure ex negativis expreſſionibus hanc ſuperiorem hyperbolarum infinitatem Vallíſius concluſerit. Patet autem, id ad me vix pertinere, qui de hoc controverſiæ puncto nihil pronunciare ſum auſus, contentus *ſimpliciter referre* ejuſmodi indicium negativæ quantitatis a Vallíſio propoſitum, & ex ipſamet noſtra methodo profluens (quod et obiter fecit ipſe Clariſs. Fontenellius initio recenſionis ſcripti Varignoniani, *non approbans utique, ſed tantum enarrans* quid ex talibus doctrinis conſequi videretur) *nullam tamen in*

eo indicio vim faciens, nec Valliſii defenſionem, quoad hoc doctrinæ caput, in me ſuſcipiens; Sed aliunde exiſtentiam ſpatiorum *pluſquam-infinitorum*, juxtà notionem a me in *def.* 7. jam declaratam, & in ipſis Valliſianis hyperbolis deprehenſam, probare contendens. Unde licet obiter in *Schol. prop.* 12. *pag.* 84. quædam perſtrinxerim ad vim prędictæ illationis Valliſianæ utcunque fulciendam, tamen *pag.* 86. ſic expreſsè concluſi. *Sed hæc obiter dicta ſint in Valliſiani argumenti defenſionem, cujus cauſa tamen ab hoc puncto non pendet, cum nec mihi propoſitum ſit, ab ejuſmodi analytica expreſſione variorum infinitatis graduum evidentiam repetere (qui ſanè hinc non ſatis commodè elicerentur, alteram aream hyperbolicam alteri ſuperioris ordinis comparando, & in hoc tantum Valliſii ratio deficere videtur) ſed potius geometrica oſtenſione; quæ hanc negativi ſigni ambiguitatem nihil moratur.*

17. Non eſt itaque, cur me non demonſtraſſe jactet Varignonius quod mihi nunquam demonſtrandum aſſumpſi; & fruſtra omninò huc me pertrahere conatur, quando de induſtria has ſalebras ab initio declinavi, non quidem ab eo edoctus, quod expreſſio negativa ſitum contrarium quantitatis, quæ tali ſigno afficitur, indicare ſoleat (quanquam enim plurima ab ejus egregiis monumentis me didiciſſe ſpontè fatear, & gratus agnoſcam, id certè longè antea ab aliis paſſim animadverſum notaveram) ſed ex ipſiuſmet Valliſii doctrina id deducens, cujus verba *ex Oper. Math. tom.* 2. *pag.* 286. egomet *in libro meo pag.* 74. retuli, expreſsè, & diſertiſſimè idipſum, quod Varignonius inculcat, ſignificantia. *Impoſſibile eſt*, inquit, *quantitatem ullam negativam eſſe, impoſſibile eſt enim, ut ulla magnitudo ſit minus quam nihil, aut ullus numerus paucior, quam o, nec tamen eſt ea ſuppoſitio aut inutilis, aut abſurda, modò rectè intelligatur: quamvis enim, quoad puram notationem algebricam, minuere videatur nota — magnitudinem, quæ*

mi-

Digitized by Google

minor ſit quam nihil; Cum tamen phyſicam ſubit conſideratio-nem, magnitudinem non minus realem denotat, quam ipſum +, ſed ſenſu ſuppoſitioni contrario interpretandam. Verbigratia, ſi quis promoveri ſupponatur 5. paſſibus, atque tum retrocedere paſſibus 2. atque tum interroget quiſpiam, quantò promotior ſit factus? Dicetur 3. paſſibus promotior, propter 5 − 2 = 3. *Si autem poſtquam proceſſerat 5. paſſibus, retrocedat paſſibus 8. atque tum interroget quis, quantò ſit promotior? Reſpondebitur* − 3. *paſſibus* (*propter* 5 − 8 = − 3.) *hoc eſt 3. paſſibus minus promotus &c.* cujus rei alia deinceps exempla etiam geometrica congerit, tam appoſitè ad ſenſum Cl. Varignonii, ac ſi ab ipſomet hoc myſterium edoctus fuiſſet.

18. Interim ergo, cum negativas magnitudines velut nihilo minores conſideraverit Valliſius, & tanquam ipſomet o minùs poſitivas, ubi de expreſſione pluſquam infinitorum agitur, acceperit; in cauſa eſt, ut *loc. cit.* animadverti; quòd numeros negativos in abſtracto conſideratos, & nulli certæ poſitioni adfixos, tractaret: quomodo non eſt quod vereamur *infra nihilum deſcendere*, & negativos numeros nihilo minores admittere; hæc enim eſt contraria poſitio progreſſioni numerorum a *nihilo ſurſum aſcendentium*: uti conſtat in ſerie qualibet arithmetica, ultra ipſum o de more continuata 3. 2. 1. o. − 1. − 2. − 3. &c. qualis adhibetur paſſim in logarithmis, & exponentibus rationum, ac poteſtatum ex diviſione unitatis prodeuntium, aliiſque tum arithmeticis, tum algebricis operationibus; Enimverò non eſſet eadem differentia defectiva terminorum ſuccedentium, niſi quemadmodum 2. minor eſt, quam 3., etiam − 1 minor eſſet, quam o; Et quidem hoc ſenſu optimè Cl. Leibnitzius admonuit in ſuo ſcripto Varignonianæ reſponſioni in iiſdem actis Lipſienſibus ſubnexo, a ſe non probari, quod negativas magnitudines minores nihilo Varignonius negaret: ait enim; *Interim nolim*

C *cum*

cum illo (Varignonio ſcilicet) *negare* — 1 *eſſe quantitatem nihilo minorem, modo id ſano ſenſu intelligatur*. Ex quo jam ſequitur, eodem ſenſu admitti poſſe, rationem 1. ad — 1. majorem eſſe ratione 1. ad 0; adeoque *majorem ſimpliciter infinita*; (1) ac ſaltem tolerari poſſe expreſſiones ejuſmodi, tanquam ad calculum valde utiles, plurimiſque veritatibus detegendis maximè conducentes: eo ferè modo, quo Aſtronomorum veterum Epicycli, licèt purè imaginarii, & ideales ſint, & phiſicè nihil reale deſignent, cæleſtium tamen corporum motibus exponendis, ac realibus propietatibus ſtationum, ac tretrogradationum Planetarum explicandis optimè inſerviunt, æquè ac vera quælibet, ac phyſica cæleſtium motuum hypotheſis.

19. Quare non ægrè conceſſerim celeberrimo Leibnitzio, rationem poſitivi ad negativum, *purè imaginariam* habendam eſſe, cùm non poſſit ulla relatio magis realis eſſe; quàm ſint termini, inter quos conſiſtit: manifeſtè autem ipſemet Valliſius purè imaginarias eſſe negativas quantitates ultro faſſus eſt in ſua Epiſtola ſcripta *Oxonii* 2. *Julii* 1698. ad ipſum Leibnitzium, in qua ſic loquitur: *Et quidem omnis omninò negativa quantitas (ſive ſit linea, planum, ſolidum, aut aliud quicquam) eſt pariter imaginaria, & impoſſibilis, quippe impoſſibile eſt, ut exiſtat quicquam, quod ſit minus, quam nihil; ſed quo ſenſu velit quis imaginari quadratum negativum* — bb, *pariter imaginari debet imaginarii hujus quadrati latus imaginarium*. Et in alia ruſus Epiſtola data 16. *Januarii anni ſequentis* 1699. ad eundem Leibnitzium inquit: *Quòd* — bb *quantitatem dixi imaginariam, id intellige, quo ſenſu omnis negativa quantitas eſt (ſtrictò ſenſu) imaginaria, quippe quod non poſit quicquam exiſtere, quod ſit minus quam nihil. Sed* b V — 1 (hoc eſt V — bb) *eſt duplici*

(1.) Et quidem, non determinato aliquo exceſſu, per numeroſas rationes metiendo, utcunque majorem, ſed *infinities*: nam ratio 1. — 1, nedum major eſt, quàm 1. 0, ſed etiam quam 2 0, aut 3. 0, aut quotlibet unitatum m. 0; eoquod factum eſtremorum, ſcilicet 0 ſemel acceptum, majus eſt facto mediorum, hoc eſt — 1, — 2, — 3, — m

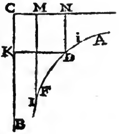
plici nomine imaginarium, quaſi in ſecundo gradu remotum (parum abſuiſſe credo, quin illi *pluſquam imaginarium* hoc loco excideret) *eſt utique* $\sqrt{-1}$ *media proportionalis inter* $+1$, *&* -1; ſicut $\sqrt{-bb}$ media eſt proportionalis inter $+b$, & $-b$, & vulgò pro ſimplicis generis imaginaria (nec enim primum genus $-b$ imaginariis annumerant) aſſignari ſolet. Ut autem præter veras, & falſas radices (quæ negativæ ſunt, & Valliſio imaginariæ primi gradus dicerentur, ſi tanquam nihilo minores ſpectandæ forent) etiam ſtricto ſenſu imaginariæ in Algebra admittuntur, quæ ſua utilitate non carent; ſic & ratio, quam Illuſtriſs. Leibnitzius imaginariam eſſe probat, inter poſitivam, ac negativam magnitudinem reperta, licet nullum Logarithmum ejuſmodi rationi correſpondere Vir Clariſs. cenſeat [cui ego *pluſquam-infinitum* ſive infinities infinitum negativè ſumptum haud abſurdè aſſignari poſſe crediderim] non omninò reſpuenda videtur, ob uſum, quem in taxandis variis infinitatis gradibus habere fortaſſe poteſt. Nam & ipſæmet magnitudines infinitè parvæ variorum ordinum, æquè ac variorum generum infinitè magna, quidpiam reale non ſunt in rerum natura exiſtens, vel etiam poſſibile, ut idemmet Leibnitzius monet, atque ego ipſe *in Scholiis definitionum* 3. *&* 4. expreſsè animadverteram. Et tamen ipſa magnitudinum geneſis, & extenſionis natura, tam infinitè dividi, quam infinitè extendi, ultra omnem proportionem aſſignabilem, capax, optimum nobis fundamentum præbet hæc ipſa concipiendi, & varios illos infinitè decreſcentium, aut creſcentium quantitatum gradus accuratè diſtinguendi; & quidem magno ſcientiarum bono, ob fructus longè uberrimos, quos ex notionibus iſtis purè imaginariis, Algebra, Geometria, & Phyſica ſuperiori ſæculo reportarunt,

20. Sed ne declinare omninò videar hoc controverſiæ caput, quod ſecundam, ut dixi, ex ſuprapoſitis quæſtionibus

nibus tangit, nimirum an jure Valliſius ex negativa indicis expreſſione altiorem deduxerit infinitatem ſuarum hyperbolarum? (quanquam non tenear hac in re illi patrocinari, quem ſatis vindicaſſe me arbitror in præcipuo controverſiæ puncto, quod unum illuſtrandum ſuſcepi, & ſcopum mihi propoſitum, vel ipſomet Varignonio fatente, feliciter attigi, ipſammet altiorem infinitatem hyperbolarum Valliſii abſolutè demonſtrando: adeo ut qui dudum communis hyperbolæ Apollonii aream his præferebat, nunc has gradu infinitatis illa ſuperiores mecum agnoſcat, & ex ipſamet ſua formula hanc veritatem deducat) breviter animadverto, quòd Valliſii methodus eam inverſionem arearum, ob negativas earumdem expreſſiones, nequaquam ferebat, licet eam optimè inferat, tum methodus Neutoni, tum Leibnitzij, tum aliorum Geometrarum, qui jam ante Varignonianam enodationem myſterii, in quantitatibus pluſquam infinitis reperti, per contrariam poſitionem ejuſmodi magnitudinum interpretabantur, uti Sluſius *in miſcellan. cap.* 5. David Gregorius *in exercit. geometr. dimenſ. figur.* Georgius Cheynæus *in methodo inverſa fluxionum ad Probl.* 1. *Poſtſcripti n.* 2. Iſaac Neuton *De Analyſi per æquationes infinitas regula* 1. *n.* 4. & alii. Ratio eſt, quia progreſſus Valliſianæ arithmeticæ infinitorum poſtulat, ut diviſo axe figuræ in particulas innumeras ab ipſo o. arithmeticè creſcentes, ordinatiſque ad diviſionum puncta ſectionibus figuræ baſi parallelis, quæ creſcant, aut decreſcant a vertice juxtà rationem aliquam abſciſſarum utcunque multiplicatam, aut ſubmultiplicatam, hoc eſt conſtituant ſeriem poteſtatum, aut radicum directè, vel reciprocè iiſdem abſciſſis reſpondentium: comparando poſtmodum hanc ſeriem ad ſeriem ultimo termino æqualium terminorum, ideſt ad figuram ejuſdem axis, & baſis inſcriptam, aut circumſcriptam areæ propoſitæ figuræ, ſemper generatim reſultet ratio eadem, quæ eſt unitatis ad indicem propoſitæ

poſitæ

poſitæ ſeriei unitate auctum.



21. Poſita igitur exempli cauſa hyperbola quadratica A D F, & determinato axe C N, eoque in particulas innumeras æquales diviſo, ſi ad ſingularum terminos applicentur ordinatæ M I, quæ ſint reciprocè ut quadrata abſciſſarum C M, conflabunt hę ordinatę ſeriem reciprocam ſecundanorum (ut Valliſius appellat) cujus index − 2, & ideò ſi area per hanc ſeriem expreſſa, nimirum N D I B C, cujus terminorum numerus exprimitur per altitudinem axis C N, & cujus ultimus terminus eſt ordinata N D, referatur ad ſeriem totidem ultimo æqualium, videlicet ad inſcriptum parallelogrammum N D K C, erit illa ad hoc (ex generali lege per inductionem a Valliſio probata) ut unitas ad indicem ſeriei unitate auctum, ſcilicet, ut 1. ad − 2 + 1, ſive 1. ad − 1. nempe in ratione poſitivi ad negativum; Quod ſi hæc negativa expreſſio ſignificaret hoc loco, ſumendam eſſe aream A i D N A; quæ ultra ordinatam D N ad partes A exporrigitur, jam non referretur ſeries terminorum ſecundanis reciproca ad ſeriem totidem ultimo æqualium, ut fert Valliſii methodus, quippe ordinatæ in hyperbola ultra D N ad partes A totidem ſunt, quot puncta in aſymptoto infinita N A ſumi poſſunt; quæ verò ordinantur in parallelogrammo adjacente N D K C tot ſunt duntaxat, quot puncta in linea finita C N. Non igitur in methodo arithmeticæ infinitorum Valliſianæ locum habere poteſt prætenſa tranſpoſitio areæ ob ſignum negativum, qualis ex aliis methodis deducitur, & tutò uſurpatur. Quare enodatio myſterii in areis pluſquam-infinitis reperti juxtà Valliſianam expreſſionem, non ſufficienter tradita videtur a Varignonio, culpante in hoc puncto Valliſium, tanquam cui error irrepſerit

ex

ex non obſervata prædicta negativarum magnitudinum reſolutione, & mutatione in alias poſitivas contrario ſitu poſitas; hæc etenim obſervatio nullatenus ejus methodo congruebat. Præſertim cum terminus homologus quantitati negativæ in ea comparatione non ſit area hyperbolica, quam prætendit Varignonius invertendam, ſed parallelogrammum inſcriptum, quod eſt conſequens proportionis; ut alias notavi in meo libro *pag.* 86. Tantum obſervo, auctarii loco, potuiſſe Valliſium, ex quo area illa hyperbolica, ad partes B poſitivè accepta, ad inſcriptum parallelogrammum videbatur, ex ſua methodo, rationem habere quam 1. — 1 (& in aliis :: 1. — 2, aut :: 1. — 3 &c.) immediatè deducere dimenſionem reliquæ areæ finitæ, ultra D N ad oppoſitas partes A, negativo modo acceptæ; Sit enim area hyperbolica = A; parallelogrammum inſcriptum = P; Si igitur e.t A. P :: 1. — 1, ductis invicem mediis, & extremis; erit P ſemel poſitivè acceptum = A ſemel negativè ſumptæ; ideſt N D K C = areæ N D A ſitu contrario poſitæ [fatetur enim, ut vidimus, Valliſius quantitates in concreto, & phyſicè ſumptas, ubi negativo ſigno afficiuntur, inverſam poſitionem ſortiri] & ſimiliter, ubi ſe prodit A. P :: 1. — 2, fiet P = A bis negativè acceptæ, ſeu N D K C duplum N D A; & ſimiliter in reliquis. Quod autem has illationes aut non animadverterit, aut neglexerit, nullius reprehenſionis aleæ noſtrum Auctorem obnoxium reddit, quippe qui *prop.* 105. repetita ſuæ regulæ applicatione has veritates directè probare inſtituerat.

22. Itaque non video, cur legitimè non proceſſerit Valliſius in ea magnitudinum comparatione, & cur hac etiam in parte defendi non poſſet ejus doctrina ab eo, qui id in ſe negotii ſuſciperet, ut Valliſium nihil humani paſſum ea in re oſtendere conaretur; Si enim, Leibnitzio ipſo fatente, tolerari poteſt, ut negativæ magnitudines minores nihilo dicantur; cur non etiam pari jure, & eodem ſenſu

tole-

tolerari queat, ut ratio poſitivæ unitatis ad negativam dicatur major, quam ejuſdem unitatis ad nihil, adeoque major quam infinita [quæ ipſis Leibnitzio, & Varignonio citra ſcrupulum eſt :: 1 . 0] ſeu phraſi Valliſiana *pluſquam-infinita*? Ego equidem aliunde, quàm ab illo indicio, altiorem hanc infinitatem hyperbolarum Valliſii probandam cenſui; ſed non ideo indicium ab ipſo propoſitum damnare auſim, cujus utilitatem in pluribus exemplis agnoſco, ſi non ad directè demonſtrandum, ſaltem ad ſignificandum ſuperiorem infinitatis gradum, quo ſemel per hoc ſignum detecto, excitari poſſumus ad ipſum, ex principiis infiniteſimalis calculi, exactius oſtendendum. Cum autem Valliſii tempore [qua videlicet ætate Arithmeticā ſuam junior ſcripſit] nondum innotuiſset methodus Neutoniana, aut Leibnitziana, qua deteguntur infiniti gradus, tum infinitorum, tum infinitè parvorum; non poterat Vir Clariſs. eoſdem infinitorum ordines altiores explicatius diſtinguere, & recenſere; quamlibet hyperbolicam aream ad ſuum infinitatis gradum expreſsè revocando; Satis ergo mirari non poſſum, qui potuerit, abſque novæ analyſeos principiis, latentem in altioris gradus hyperbolis altioris etiam infinitatis gradum fœliciſſimo ingenio ſuo ſubodorari, & ex negativa illa expreſſione *Pluſquam infiniti* exiſtentiam deducere, generalem illam regulam ſuam (quam nuſpiam fallere Varignonius convincit) in Schol. prop. 101. intrepidè exponens, qua cenſet, quod ſi eadem ratione minuuntur ordinatæ, qua creſcunt abſciſſæ, emergit totius areæ ſpatium ſimpliciter infinitum; ſi verò majori ratione illæ decreſcant, evadit abſolutè finitum; ſi demum minori ratione illæ minuantur, emergit area pluſquam infinita. Ubi patet, hunc canonem, æquè ac negativam indicis expreſſionem, pro ſatis idoneo criterio haberi poſſe, & ad diſtinguendas ſpeciales claſſes infinitorum, ad quas variæ figuræ revocantur, utiliter adhiberi; Æquitatem porrò

ipſam

Digitized by Google

ipſam poſtulare, ut hac ſatis commoda, & naturali expoſitione Valliſiani ſenſus, dum altiores infinitates, ſub hoc generali, & confuſo vocabulo *Pluſquam-infiniti*, complexus eſt, ejus doctrinam illuſtremus, potius quam traducamus, & *veriorem hanc myſterii enodationem*, diſtinctis variis infinitorum gradibus, proferamus, potius quam ut per inverſionem areæ hyperbolicæ (quæ Valliſianæ methodo minimè congruit, ut vidimus) negativas expreſſiones vulgato more exponendas, reprehenſa, & rejecta Clariſs. Auctoris methodo, abiectaque [ob ſcrupulum in uſu vocabuli apprehenſum] tam mirabili *Pluſquam infinitorum* ſpatiorum veritate, judicemus.

23. At enim abſurdum videtur Varignonio, quod ratio 1. ad $-$ 1 ſit utcunque majoris inæqualitatis, tantum abeſt, ut exceſſus pluſquam infiniti habenda ſit; alias enim eadem ratio æqualis dicenda foret inverſæ rationi minoris inæqualitatis; ſcilicet $-$ 1. ad 1., quia quod ab extremis producitur, æquatur producto ex intermediis terminis negativis. Ego verò vim adeò ineluctabilem in hac obvia difficultate minimè agnoſco, ut illi ſuccumbere neceſſe ſit. Ponamus centum libras Florentiæ æquivalere 81. libris alterius regionis, puta Matriti; vera igitur erit hæc analogia: Decem libræ Florentinæ ad novem libras Matriti, ſunt, ut reciprocè novem libræ Matriti ad decem libras Florentiæ; quod enim fit ab extremis, hoc eſt 100. libræ Florentinæ, æquatur ei quod fit ex mediis, ſcilicet 81. libris, matritenſibus, ex hypotheſi. An igitur ratio majoris inæqualitatis 10. ad 9. æquatur rationi inverſæ minoris inæqualitatis 9. ad 10.? Nullo modo; Nam termini unius rationis juxtà unam quantitatis ſpeciem comparantur, puta ſecundum quantitatem diſcretam multitudinis librarum: termini verò rationis alterius juxtà aliam quantitatis ſpeciem referuntur, nempe quo ad pondus; & utrobique eadem ratio eſt majoris inæqualitatis, cum etiam 9. libræ Matriti plus.

plus ponderis habeant, quam 10. Florentiæ.

24. Sed ut magis appoſitis exemplis rem conficiam, nonne velocitas Aquilæ ad velocitatem formicæ eſt reciprocè, ut tarditas formicæ ad tarditatem Aquilæ? Nonne denſitas aquæ ad denſitatem olei eſt reciprocè, ut raritas olei ad raritatem aquæ? Atque ut propiùs adhuc ad propoſitum noſtrum accedam, nonne qui habet in bonis 100. aureos tanto ditior eſt eo, qui nedum nihil habet, ſed 100. aureos debet, quantò viciſſim hic pauperior eſt illo? Ecquid aliud autem ſignificatur, cum dicitur 1. — 1 :: — 1 . 1, niſi quòd perinde *poſitiva quantitas* unitatis eſt major [& quidem infinities, imò pluſquam infinities] *ſimili quantitate* (quam infra nihilum diminutam in conſequente imaginamur) ipſius — 1, ut negativa, ſeu *defectiva quantitas* ejuſdem — 1 major eſt (eodem infinitæ multiplicitatis gradu) *ſimili defectiva quantitate* (quam in hujus relationis conſequente imaginari ſaltem poſſumus) poſitivæ unitatis? nimirum quantò magis accedit ad poſitivam, & realem quantitatem entis unitas affirmativa, quàm negativa, tantò magis recedit ab eadem poſitiva, & reali quantitate entis unitas negativa, quàm affirmativa; Itaque utrobique eſt ratio *majoris inequalitatis*, ſed in diverſo quantitatis genere; ibi ſcilicet *poſitivæ*, hic *negativæ*; ſpeciem verò deſumit quantitas, quæ relationem fundat, ab antecedente; unde quia in prima relatione antecedens eſt † 1, intelligitur comparari quantitas poſitiva, quæ cum tanta non ſit, ſed infinities minor in conſequente — 1; hinc illa ratio majoris inæqualitatis cenſenda eſt; quia verò in ſecunda ratione antecedens eſt — 1. intelligitur hic comparari quantitas privativa, ſeu defectus, qui cum tam magnus non ſit in conſequente † 1; ſed infinities minor, hinc pariter hæc ratio dicenda erit, in ſuo genere, *majoris inæqualitatis*. Nec majorem video in his loquendi abuſum, quam cum quies pro infinita tarditate, ſeu pro velocitate infi-

Digitized by Google

nitè parva, a Geometris paſſim habetur, adeò ut dici poſſit velocitas Teſtudinis eſſe ad initialem velocitatem gravium ex quiete deſcendentium, ut tarditas hujus initialis deſcenſus ad tarditatem Teſtudinis; nec aliter dici poſſet, eum qui in orientem progreditur, infinities magis eò accedere, quam qui in occidentem graditur, pari ratione, qua vicissim in [illegible] magis infinitè recedit, quam ille. (1)

25. Ceterùm quandoquidem ex Cl. Hoſpitalio *in tract. de Infinitè parvis art.* 45. quælibet indeterminata quantitas, ut ea primò ex poſitiva evadat negativa, debet neceſſariò aut per nihilum, aut per Infinitum tranſire, & quidem per illud, ſi continuò minuatur, per hoc verò, ſi continuò augeatur [unde eſt, quod in regula monachorum præſcribitur, ad inveniendam maximam, aut minimam quantitatem, poni

(1) Hinc obiter ſimiles aliæ paradoxæ Inſtantiæ ſolvuntur; nam primò cum ſit 2 . 1 :: −2 . −1; quia, ſive media, ſive extrema invicem ducas, ſemper prodit −2; primæ verò ratio minor ſit quam inverſa ſecundæ; ideſt 2 . 1 < −1 . −2; quia factum ab extremis −4 < −1 facto a mediis: ergo & eadem ſecunda deberet minor eſſe ſua inverſa, ideſt −2 . −1 < −1 . −2; cum tamen factum ab extremis +4 majus videatur facto a mediis +1; ſed obſervandum eſt, hanc inæqualitatem verſari in genere quantitatis negativæ, juxta quem ea minor eſt quantitas (ideſt minus defectiva) quæ magis habet de poſitivo; & ideò in hac comparationis ſpecie +4 minus cenſeri debet quam +1.

Secundò, ſi 1 . −1 :: −1 . 1; fiet componendo 1 − 1 . −1 :: −1 + 1 . 1; hoc eſt 0 . −1 :: 0 . 1 (nempe tantò minus de negativo habet 0, quam unitas defectiva −1, quantò minus habet de poſitivo idem 0, quam unitas poſitiva 1) [illegible] videtur inferri −1 = +1. Sed notandum, quod non refertur idem antecedens ad utrumque conſequens juxta eandem rationem, ſeu ſpeciem quantitatis in uſu conceptæ. Sic in ſuperiori exemplo ponendo libras Florentinas = f, [illegible] = m, erit 10 f . 0 m :: 0 m . 10 f; & componendo 10 f + 0 m . 0 m :: 10 f + 0 m . 10 f; nec ideò tamen 0 m = 10 f; quia idem antecedens uni conſequenti [illegible] juxta quantitatem diſcretam numeri librarum, alteri verò [illegible] juxta quantitatem continuam ponderis earundem.

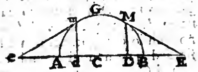
Tertiò denique ex quo plusquam infinitum ad finitum aſſeratur eſſe a Valliſio, ut 1 . −1; [illegible] inferret; Convertendo fore finitum ad plusquam infinitum, [illegible] 1, & [illegible] fore [illegible] finite, & plusquam infiniti eſſe ad plusquam infinitum [illegible] hoc eſt [illegible] 0 . 1, quæ foret ratio infinitè parva totius [illegible] ad [illegible] præcipuam partem, cui potius debuit adæquari, ob differentiam [illegible] Negandæ ergo prima conſequentia, in qua arguitur convertendo, [illegible] ut vidimus, 1 . −1 :: −1 . 1; non igitur poteſt prima ratio eſſe plusquam infiniti ad finitum; ſecunda autem è converſo finiti ad plusquam infinitum, ſed utrobique ipſa eſt (in terminis tamen negativis) pluſ-

quæ

Digitized by Google

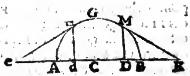
poni debere ejus differentiam = o, vel = ∞, quippe in confinio augmenti, aut decrementi talis quantitatis, ejus differentia ex poſitiva fit negativa] utique non abſurdè concipitur, quod ubi nihilum, aut infinitum attigerit, ſi pergat eadem quantitas ulterius procedere, & diminutionem infra nihilum, & augmentum ultra infinitum ſuſcipiet, adeoque tum nihilo minor, tum infinito major, ſeu *pluſquam-infinita*, neceſſariò evadet; non quòd quiddam *abſolutè nihilo* minus, vel *omnimodo infinito* majus re vera exiſtere poſſit, ſed nihilo cujuſdam generis, & infinito cujuſdam ordinis.

Ut ſi ſumatur in circulo A G B diſtantia applicatæ M D a centro C, quæ ſit CD, cui correſpondet CE, centro, & occurſui tangentis



quâ infinita ratio. Niſi quis velit antecedens rationis − 1 . 1 poſitivè ſumere; hoc eſt, per quamdam juris analytici fictionem, aliquid quantitatis, & magnitudinis (licet infra o infinities diminutæ) ipſi tribuere; quo caſu, admiſſa conversione, non fieret componendo $-1+1=0$; Eatenus enim − 1 appoſitus ipſi + 1 deſtruit, & annihilat ejus quantitatem, quatenus privativè ſumitur pro determinato defectu unius unitatis, qui defectus ſuppletur adiecto + 1, ita ut jam nihil, ſeu o remaneat; at ſi ſumatur poſitivè pro tantilla quantitate, quæ ne dum pro nulla, ſed minus quam pro nulla eſtimanda ſit, reſpectu unitatis poſitivæ, tunc $-1+1=1$. & adeò ratio aggregati ex finita, & pluſquam infinita quantitate ad pluſquam infinitam quantitatem evadit ratio æqualitatis, cui non derogat adjectio illius tantillæ quantitatis ad unum terminorum.

Sed tum propter has ſalebras, tum propter rationes *pag.* 86. *mei Libri: De Infinitis* indicatas, conſultius ducerem, rationem pluſquam infiniti ad finitum exhibere, aut Stanchariano modo per $\infty^2 . o$, vel $\infty^3 . o$ &c. pro vario infinitorum gradu (ut *ibidem pag.* 74. obſervavi) aut characteriſticâ Leibnitzianâ per *x*. *ddx*, ſive *x*. $d^3 x$ &c. non pro 1 . − 1, aut 1 . − 2 &c. quibus expreſſionibus varii pluſquam infinitorum gradus nequeunt ſignificari, quia cum tam − 1, quam − 2 ſint ejuſdem inter ſe ordinis, adeoque in ratione aſſignabili : : 1 . 2; addendo rationem − 1 . − 2 rationi 1 . − 1; non exurgit ratio, 1 . − 2 infinities major præcedente 1 . − 1, ſed propè æqualis, quia non comparabiliter augetur hæc per additionem illius infinities minoris, neque adeò ad ſuperiorem ordinem elevatur. Et in hoc duntaxat (ut dixi *pag.* 86. *libri citati*) Valliſii ratio *deficere* (nempe ſcopum hunc, diſtinguendi varios pluſquam infinitorum ordines, non attingere) mihi ſemper viſa eſt, etiamſi, veluti in confuſo, rationem illam imaginariam, & indeterminatam poſitivi ad negativum (qualecumque ſit conſequens, ſive − 1, ſive − 2, ſive − 3] utcunque referre viderem rationem majorem infinita, ſeu pluſquam infinitam indeterminatè, & abſque ulla variorum ordinum diſtinctione ſpeciali conſideratam.



gentis interpoſita: intelligatur autem illa continuò decreſcere, per acceſſu puncti D ad centrum C, hæc viciſſim continuò augebitur, per receſſum puncti E ab eodem centro; itaque ubi penitus evanuerit C D, facta = o, ob coincidentiam punctorum D, & C, tunc C E infinita evadet, puncto E ad infinitam diſtantiam a centro C recedente, quia tangens ex vertice G jam parallela fiet diametro C B. Quod ſi pergat punctum D ulterius procedere verſus A, veniendo in ſitum *d*; jam quantitas C *d* fiet negativa, eademque minor nihilo dici poterit: non quatenus revera aliquid non ſit, ſed quia non eſt aliquid ad eandem partem dextram puncti C, ad quam extendi conſueverat; imò potius tranſiit ad oppoſitam partem ſiniſtram, quod multò minus eſt, quam ſimpliciter nullam habere extenſionem ad dextram; ita ut ſemper deinceps pergat punctum *d* à centro C recedere, cui antea continuò accedebat; & ſic in genere progreſſus verſus punctum C conſiderari poteſt intercepta C *d*, ut minor quam nulla, quia potius eſt menſura regreſſus.

26. Porrò tranſeunte puncto D ultra C ad partes contrarias in *d*, etiam punctum E, velut emenſo infinito intervallo, ad eaſdem oppoſitas partes tranſit in *e*; fitque C *e* negativa, & quidem definitæ quantitatis ipſi C *d* reciprocæ; tantum abeſt, ut *pluſquam-infinita* cenſeri debeat. Sed obſervandum eſt, partem, quæ punctis C, & *e* intercipitur, vel ſumi poſſe ex C per E dextrorſum (ad quas partes jam extendi ſupponebatur) in infinitum progrediendo, uſque dum completo veluti infinito circulo, ad oppoſitas partes ſiniſtras in puncto *e* conſiſtamus; vel immediatè ex C ad dictum punctum *e* ſiniſtrorſum perveniendo. Hoc ſecundo modo, ipſam C *e* quiddam finitum eſſe concedo; priori tamen modo eſt quiddam *pluſquam-in-*

fini-

finitum, major eſt enim, quàm quælibet aſſignabilis extenſio longitudinis ſimpliciter infinitæ ad dexteram protenſæ. Sic quia longitudo Civitatum deſumitur à primo meridiano, ſyderum verò ab initio arietis, orientem versùs computando, ſi uno gradu occidentaliorem locum, aut ſtellam, quam ſit initium illud longitudinis, conſideramus, ejus longitudo erit omninò gr. 359. non vero gradus unius; & re vera tantum circuitum peragere cogitur Sol, ut a primo arietis gradu ad ultimum piſcium [illi alias contiguum] procedat; idemque contingeret, ſi immenſa foret ambitus terræ, vel firmamenti amplitudo; quo caſu duæ urbes, aut ſtellæ proximæ, ſeu paucis leucis ex una parte disjunctæ, ex alia parte diſtantiam haberent pluſquam infinitæ longitudinis menſura [abſoluta ſcilicet, nam relativa per ſolos 360. gradus taxanda ſemper eſſet] determinatam; Quod & aliis clarioribus exemplis oſtendere pronum eſſet, niſi perſpicaciſſimo Varignonio hæc ſuperfluè obtrudi ſatis agnoſcerem.

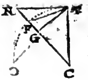
27. Venio igitur jam ad recriminationem circa angulum contactus, quem æqualem eſſe infinitè exiguo ad centrum oſculantis circuli conſtituto Vir Clariſſimus adhuc contendit, etſi ego ejus dimidium ad ſummum haberi poſſe ſtatuerim in *Schol. prop.* 4. Meæ aſſertionis ratio fuit, quod ab Euclide didicerim, angulum a tangente, & ſecante contentum æqualem eſſe ei, qui in alterno ſegmento, cujus utique duplus eſt angulus ad centrum conſtitutus, ut ipſemet Euclides demonſtrat. Unde cum ſecans arcum infinitè parvum, dici poſſit (ad ſummum) cum illo coincidere, efficiet ad tangentem angulum contactus dimidium anguli centralis; Imò etſi ab arcu infinitè exiguo ſubtenſam diſcernere quis velit, conſequenter angulum contactus minorem, quam ſubduplum centralis anguli fateri cogetur; nunquam verò illi prorſus æqualem.

28. Regerit tamen Vir Clariſſimus, me non ſatis attendiſſe,

diſſe, quod circulus pro polygono infinitorum laterum, in ejuſmodi profundioribus diſquiſitionibus, haberi ſoleat, cujus proinde unum latus productum exhibebit angulum externum coincidentem angulo contactus ſemicirculi, eundemque æqualem angulo, quem unicum dicti polygoni latus ad centrum ſubtendit, ut generatim in omni regulari polygono evenire neceſſe eſt. Fateor quidem circulum, & magnitudine, & forma æquivalere polygono infinitorum laterum, ſive circumſcripto, ſive inſcripto, dummodo hæc ſuppoſitio *ſano ſenſu* intelligatur, & *cum debitis cautionibus* applicetur; Sed nego hanc æquivalentiam, uſque ad angulorum, de quibus agimus, æqualitatem exporrigi poſſe; nego ad omnem effectum extendi debere; cujus diſcriminis ut aliud notiſſimum exemplum afferam; nonne evidens eſt, tametſi perinde incidentes radios reflectat curva ſuperficies, ac planum tangens, eodemque angulo radii reſiliant a curva linea, atque a recta ipſam contingente, nihilominus ſpeculum ſphericum a polyhedro infinitorum planorum plurimum diſtare, adeoque & Circulum a polygono infinitilatero, in ordine ad exhibendam objecti ante ipſum expoſiti imaginem? nam ab illo quidem unica, ab hoc multiplex reſultabit; poſitio autem longè alia erit, quippe in hoc determinabitur ex concurſu reflexi radii cum catheto in ſingulas facies, ſive in quælibet reflectentia plana polygoni, ex objecti punctis demiſſo; in illo autem longè alia ratio eſt; talis namque eſt in radio reflexo diſtantia imaginis a puncto reflexionis circuli, quę ſi in radiũ directum transferatur, ejuſque portio circulo incluſa biſariam ſecetur, ab hac ſectione, & puncto translatę imaginis, punctoque incidentiæ, & ipſo objecto, harmonicam diviſionem conſurgere coget.

29. In noſtro igitur propoſito tangat NT circulum radio CT deſcriptum, & ducatur ſecans CN occurrens peripheriæ in F, & jungatur ſubtenſa TF, nec non agatur,

TG



TG perpendicularis ſecanti CN; Conſentio, quod accepto arcu TF infinitè parvo, poteſt is conſiderari, ut coincidens vel cum TN, vel cum TG, quæ ſunt ſemitarecta polygonorū, alterius quidem circumſcripti, alterius autem inſcripti; Nam prout puncta G, F, N propius accedunt ad punctum T; fiunt etiam invicem proximiora, & omnis differentia, quæ eſt inter TN, TF, FG, minuitur ultrà omnem proportionem, adeoque evaneſcit, has quantitates (multoque exactius ſubtenſam, & arcum TF, quippe citius ad æqualitatem convergentes) ultimò æquales relinquens, ita ut (quod attinet ad *magnitudinem*) altera pro alia tutò uſurpari queat, imò etiam eò uſque, ut una æquivaleat alteri, *quoad poſitionem*, ſi agatur de ducenda curvæ alicujus tangente, ad cujus determinationem ſufficit conſideratio anguli finiti, & ſenſibilis, quem tangens illa cum axe, vel recta quadam poſitione data, conſtituere debeat, ad quem utique angulum nulla erit proportio angulorum infinitè parvorum NTF, aut NTG, unde nihil refert, quænam ex his rectis NT, FT, GT pro tangentis quæſita determinatione adhibeatur, cum directio unius ſit directioni alterius infinitè proxima; At verò ſi comparentur invicem ipſimet anguli infinitè parvi NTF, NTG, NCT, tunc non amplius licebit harum lineolarum ſitus confundere, & alteram pro altera ſubrogare.

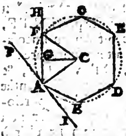
30. Ratio eſt, quia cum ſint NC, CT vel CF, & CG proportionales, neceſſariò & earum differentiæ NF, FG iiſdem CT, CG, aut NT, GT proportionales erunt; Quocirca angulus FTN (quò major non eſt, ſed plerumque minor, & cui ad ſummum ſit ultimò æqualis angulus contactûs, à tangente, & arcu conſtitutus) ſemper = angulo FTG *per* 3. 6. *elem.* adeoque angulus NTG, aut pluſquam duplus, aut ad ſummum præcisè duplus

plus



plus erit dicti anguli contactus; ſed angulo N T G *per* 8. 6. *elem.* ſemper = angulus ad centrum T C F; idque perpetuò verum erit, quantumvis imminuto ſemilatere inſcripti, vel circumſcripti polygoni; ergo repugnat, quod unquam fiat angulus N T F = angulo T C F, ſed ejus ad ſummum ſubduplus cenſeri poterit; nec enim præſumendum eſt, continuato in infinitum acceſſu puncti F ad punctum T, differentiam anguli contactus ab angulo centrali penitus unquam evaneſcere poſſe; cum ſemper horum angulorum ratio ad ſubduplam converga, & in eam denique deſinat, nec improviſo ſaltu in rationem æqualitatis valeat degenerare.

31. Nec verò conſideratio anguli externi polygonorum, qui ſemper æqualis centrali reperitur; huic propoſito congruit; ſive enim polygonum inſcriptum, ſive circumſcriptum ſumamus pro circulo, nunquam ejus latera erunt tangentes ad ea circuli puncta, de quibus agimus, ut melius intelligetur ex doctrina Cl. Valliſii *in defenſione Tractatus de Angulo contactus cap.* 2. ubi ſic habet. *Quoniam circuli radius facit ad perimetrum, vel angulos rectos, vel ſaltem*



utrinque æquales, conſiderandus erit vel ut CG (perpendicularis a centro polygoni ad unum laterum) vel ut CA (ab eodem centro ad unum angulorum) nam in nullo alio caſu recta a centro faciet ad perimetrum regularis polygoni æquales angulos, quippe anguli ad quodvis aliud perimetri punctum erunt obliqui, & inæquales; harumque duarum CG eſt breviſſima, & CA longiſſima omnium a centro ad perimetrum ductarum, & prout creſcit laterum numerus, ita propius hæ ad æqualitatem accedunt; ſi illa ſint infi-

infinitè multa, hæ infinitè propè accedunt ad æqualitatem; & in circulo æquales ſunt, & coincidentes; Sed quamvis revera eadem, conſiderari poſſunt quoq; diverſa. Si in circulo conſideretur punctum contactus, ut AF unum laterum infinitè brevium, tum eſt tangens GH continuatio hujus lateris (non angulum cum illo faciens, ſed in illo immerſa, nam FGH eſt non-angulus) & CGH (quem radius ad tangentem facit) eſt angulus rectus, prout nos affirmamus. Si punctum illud contactus conſideretur non ut AF latus, ſed ut A punctum angulare polygoni (latera FA, AN connectens) tum eſt angulus contactus $FAP = \frac{2}{\infty} R$, *infinitè exiguus, & angulus ſemicirculi* $CAF = R - \frac{2}{\infty} R$, *infinitè propè ad angulum rectum rectilineum.*

32. Quomodo patet ex Cl. Viri doctrina, nunquam æquari angulum contactus angulo centrali FCA, ſed ejus ſubduplum ſumi poſſe, quoties conſideratur contactus ad angulum A, ubi non tangitur circulus ab ullo Polygoni latere, ſed ab alia diſtincta linea PAI, quæ radio AC perpendiculariter incidit, unde reſultat angulus contactus PAF dimidius ipſius FCA; At ſi conſideretur contactus ad punctum G, latus quidem polygoni AF haberi poteſt pro tangente, ſed *reſpectu medii puncti G, non verò extremi puncti F*, ubi latus idem polygoni extra ipſum excurrere incipit, unde angulus contingentiæ cenſeri nequit externus ille HFO, qui revera æqualis foret centrali FCA, ſed nullus planè angulus hinc reſultat, qui ſit ad centralem comparabilis; pro tali ſiquidem nemo cognoſcere poſſet retortionem lineæ rectæ in ſe ipſam reflexæ, qualem exprimeret Calami ductus per puncta FGH ultrò, citròque recurrens, ac ſui ipſius veſtigia relegens.

33. Neque neceſſitas ulla nos cogit, in infinitè parvis hoc portentum comminiſci, quod inducere videtur Va-

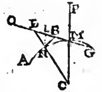
rignonius, dum *ad idem circuli punctum tres tangentes admittit*, ex quibus duæ ſint continuationes contiguorum laterum polygoni, hinc inde ab angulo, quem conſtituunt deinceps productorum, tertia verò eſt utrique intermedia, radiumque perpendiculariter ſecat. Quaſi verò methodus infiniteſimalis ejuſmodi paradoxis indigeat, & quidpiam repugnans inferat communi Geometrarum methodo, apud quos *unica* ſemper habita fuit ejuſdem circuli tangens ad unum, idemque punctum ejus peripheriæ! nec ſcio diverſum eſſe circulum *ubique curvum* a circulo, quem veluti *infinitilaterum* concipiunt Mathematici: ſed unam, eandemque figuram hiſce vocibus ſignificari ſemper ſum arbitratus; nec enim differt continua curvatura ab infinita flexione; quia ſi aliquot laterum flexilineum tantò magis curvum quid repreſentat, quantò plura, & minutiora ſunt latera, quæ inflectuntur, & perimetrum talis flexus componunt, utique ſuppoſitis jam infinitis lateribus, & infinitè exiguis, non poterit flexilineum non evadere ubique perfectè curvum.

34. Aliunde autem, quæcunque compendia per Varignonii methodum exibentur, æquè, & accuratiùs, aut certè tutiùs haberi poſſunt juxtà meam hypotheſim: unde & ipſe Varignonius expertus eſt, quod poſito angulo contactus non æquali, ſed ſubduplo anguli ad centrum, & faciendo quadratum arcus infinitè parvi æquale, ut revera haberi debet, rectangulo diametri in ſinum verſum, ſeu ſubtenſam anguli contactus, non autem æquale rectangulo radii in eandem ſubtenſam, ut poſtmodum aſſumpſit idem Vir Cl. in locis, quòs mei ſcrupuli reſpexerunt, expertus eſt, inquam, legitimas formulas radiorum, indè ſibi prodiiſſe; imò ubi de abſolutis, non verò relativis quantitatibus duntaxat determinandis agitur, ipſemet experiri potuit, non veram regulam ex principio illo anguli contactus æqualis ei, qui ad centrum conſtituitur, reſultare,

ſed

ſed planè ſpuriam, & illegitimam.

35. Quod ut conſtet, [ad exemplum enim aliquod proferendum, in quo illa methodus fallat, me Varignonius provocat) ſit PM altitudo, per quam grave decidens ſibi eam velocitatem acquireret, qua ſupponitur, deſcribere circulum GMN, aut aliam curvam, quam hic circulus oſculatur in puncto M. Itaque in latuſculo GM polygoni infinitilateri, ſub cujus forma circulus ille concipitur, ultra perimetrum curvum directè producto, ſumatur MO dupla PM, & centro M, radio MN contigui latuſculi deſcribatur arcus circuli NL, ac jungantur ad centrum radii MC, CN. Quoniam ergo MCN evadit ſimile triangulo ipſi NML, poſito MC $= r$;



& MN $= dx$, fiet NL $= \frac{dx^2}{r}$; ſit inſuper PM $= a$;

adeoque MO $= 2a$; erit tempus deſcenſus per PM = tempori motus æquabilis per MO, eadem velocitate per deſcenſum ex dicta altitudine concepta; Sed tempus per MO ad tempus per ML erit in ratione ſpatiorum :: $2a. dx$; ergo & tempus deſcenſus per PM ad tempus per ML, ſive ad illud per LN [quod tranſigitur interim a vi centripeta retrahente mobile ex directione ML in aliam MN, dum circulum deſcribit, vel quod percurreretur a vi centrifuga, ſi mobile, quod circuit, ſibi relictum, pro curva MN, tangentem ML deſcriberet, ex puncto N ad L interim aſſurgendo) erit in ratione $2a : dx$; quorum temporum duplicata ratio, nempe $4aa. dx^2$, erit (ex theoria deſcenſus gravium) eadem, ac ratio ſpatiorum interim a gravitate tranſmiſſorum; quarè ſi primo tempore peractum ſpatium erat PM, ſive a, tempore infinitè parvo (quo vis centrifuga moveret per NL) fieret vi gravi-

 tatis

tatis ſpatium $\frac{dx^2}{4a}$, & ideò vis centrifuga ad vim gravitatis cum ſit in ratione ſpatiorum iiſdem infinitè parvis temporibus ab initio motus tranſmiſſorum, erit ut NL, ideſt (ex hypotheſi Varignonii) $\frac{ax}{r}$ ad $\frac{dx^2}{4a}$, nempe ut $4a.r$, ſive ut $a.\frac{r}{4}$; id quod eſt contra Hugenium, Hoſpitalium, & alios demonſtrantes vim centrifugam eſſe ad vim gravitatis :: $a.\frac{r}{2}$ Unde falſa erit prop. V. Hugenii *De vi centrifuga*, definientis; Quod *ſi mobile in circumferentia circuli feratur ea celeritate, quam acquirit cadendo ex altitudine, quæ ſit quartæ parti diametri æqualis, habebit conatum à centro recedendi æqualem ſuæ gravitati*. Nam ex præmiſſo ratiocinio id potiuſ contingeret, ubi foret $a = \frac{r}{4}$, ideſt octavæ parti diametri, at ubi PM eſſet quarta Diametri pars, nempe $= \frac{r}{2}$, fieret vis centrifuga duplo major vi gravitatis; non igitur legitimè procedit ejuſmodi ratiocinatio.

36. Fruſtra verò exciperet Varignonius, quod in conſideratione circuli polygoni lineola LN tranſmitti intelligitur motu æquabili, non autem accelerato; & ideò nonniſi ejus medietas conferenda eſt cum ſpatio interim a gravitate per motum acceleratum confecto. Enimverò pervinde accelleratus, aut æquabilis neceſſariò concipi debet motus gravitatis unico momento reſpondens, ac ille, qui ex vi centrifuga, vel oppoſita centripeta pendet; cum ſint vires ejuſdem generis, & ex æquo applicatæ permanenter

eidem

eodem ſubjecto: inde in Parabolæ deſcriptione, quæ fit a projectis, lineola ſubtenſa angulo contactus, & axi parallela reſpondet utique motui momentaneo gravitatis, perinde ac lineola N L ſuperius conſiderata reſpondeat motui vis centralis; cur ergo in una potius, quam in alia, ſupponi poterit elementum ſpatii motu accelerato, aut æquabili tranſmiſſum? Quæ ratio coget nos tempore infinitè parvo gravitatem non uniformiter operantem fingere, dum vim centrifugam eodem temporis elemento uniformiter moventem ſupponimus?

37. Quod ſi radii oſculantium circulorum ſimili methodo a celeberrimis viris optimè determinantur, id non cogit, ut per omnia legitimum arguendi modum a Varignonio hac in re uſurpatum fateamur; nam quoties latuſculum G M productum *proxima tangente curvæ* accipitur, fallax omnino invenitur: quoties autem in argumento nihil refert, an illud latus rigoroſam habeat tangentis poſitionem, an verò dumtaxat illi infinitè proximam, itaut potius *ſecantis infinitè parvæ* ſpeciem ſubeat; tunc optimè ſuccedit demonſtrationis progreſſus; nec verò ipſe in animo habui hunc arguendi modum generatim culpare, ſi ſano ſenſu exponatur ſuppoſitio, cui innititur: ſed tantum Tyrones commonere, ne verum angulum contactus indiſcriminatim pro angulo infinitè parvo ad centrum conſtituto acciperent, ut viſus eſt facere *locis citatis in Schol. noſtro* Cl. Varignonius; Is enim non pro *Secante*, ſed pro *Tangente* accipit lateris polygonorum productionem in *Commentar. Acad. reg.* 1700. 13. *Novembr. prop.* 7. dicens: *imaginons ſur l'orbe A L M le petit coté Q L = L I le quel prolongé faſſe la tangente L H*; & ſimiliter in Commentar. 1701. 29. Januar. n. 1. ubi ait: *Soit A D le rayon de ſa developpée au point L, & L H ſa touchante en ce meme point*. Nec diſpari modo 12. *Septembr.* 1703. n. 2. vocat L T *tangentem* curvæ in L, imò & radijs oſculi *perpendicularem*; idquod

de

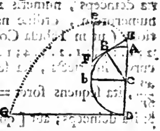
vera tangente, non de ſecante verificari poteſt; & demum 24. *April.* 1706. *n.* 17. expreſsè ſupponit curvæ ſub ſpecie polygoni infinitilateri conſideratæ *parvum latus ML productum ad T, evadere tangentem*, & ſic alibi; dum interim Cl. Jacobus Bernoullius a Varignonio citatus in *Actis Lipſiæ menſis Aprilis* 1694. radium oſculi inveſtigaturus, nunquam pro tangente habendam eſſe expreſſit productionem laterum curvæ contiguorum, quando ab iis contineri dixit angulum centrali angulo radiorum proximorum æqualem; Sed ita locutus eſt, ut de lateribus polygoni inſcripti, infinitè parvos curvæ arcus ſecantibus, totum ejus ratiocinium commodè, ac veriſſimè exponi poſſit; eademque cautio in aliis notari poteſt.

38. Cæterum ſi MB non pro ſecante ſed pro tangente rigoroſa habeatur, ducto arcu NL ad intervallum infinitè parvum MN, duci poterit alia tangens NB occurrens priori ML in B; ac tum triangulum MCN, non ipſi MNL, (ut Varignonius putat) ſed potius triangulo BNL ſimile cenſeri debet; angulus quippè LBN duplus eſt ipſius BMN, vel BNM (quippè latus BM = BN) ſicut ejuſdem duplus eſt ex dictis MCN; & quia trianguli MNL angulus ad N rectus eſt ad ſemicirculũ diametro ML deſcriptum, erit B ſemicirculi centrum, ideoque BL = BN, ſicut CM = CN; quarè ſimilia ſunt triangula LBN, MCN; unde CM . MN :: BL . LN; ſeu retentis ſuperioribus ſymbolis, $r . dx :: \frac{dx}{2} . \frac{dx^2}{2r} =$ LN, non verò $= \frac{dx^2}{r}$.

Vide fig. ſupra ad pag. 35.

39. Ut autem melius conſtet, quis apud me ſit ejuſmodi angulorum uſus, & quale in ipſorum comparatione diſcrimen attendi debeat; haud abs re fuerit ad ſequentem ſpeculationem digredi. Evolvatur peripheria circuli ABD,

&



& hinc oriatur curva A E *e* G, per tangentes B E, *be*, reſpectivis arcubus A B, *ab* æquales, determinata; Erit ſemper longitudo curvæ A E *e* tertia proportionalis poſt Diametrum A D, & arcum A B *b*; adeo ut quadrata A *b*, vel *b e* ſemper æquentur rectangulis D A *e*; ſitque ſpatium AEGDBA convoluta quædam parabola, cujus axis in curvam AEG abierit, ordinatis E B, *eb* eidem perpendiculariter manentibus applicatis, licet ſe invicem decuſſantibus, & circulum A B D mutuo quodam amplexu cingentibus; idque conſtat, comparando ſectores ſimiles infinitè parvos B C *b*, E F *e*; nam utervis angulorum B C *b*, E F *e* ejuſdem eſt quantitatis, utpote cum eodem B F *b* complens duos rectos, cum reliqui anguli ad B, & *b* in quadrilatero C B F *b* recti jam ſint, ob contactum circularem; itaque poſita B C $=r$; A B $=x$; A E $=z$; erit C B . E F :: B *b* . E *e*, ideſt $r \,.\, x :: dx \,.\, \frac{xdx}{r} = dz$, & ſummando $\frac{xx}{2r} = z$; ideſt curva A E *e* tertia proportionalis poſt duplum radii, & arcum A B *b* correſpondentem; quia verò & ſectores ſimiles ſunt ut radiorum quadrata, erit $rr \,.\, xx ::$ B C *b*, ſeu $\frac{rdx}{2}$, E F *e* $= \frac{xxdx}{2r}$; & integrando, ſpatium A B *b e* $= \frac{x^3}{6r}$; & ſubrogando z pro $\frac{xx}{2r}$, fiet idem ſpatiū $= \frac{xz}{3}$ nempe dimidium parabolæ explicatæ, cujus axis A E *e*, ordinata foret *e b*. Quod ſi eadem curva A E *e* rurſus evolveretur, & faceret aliam curvam t, quæ iterum evoluta daret aliam curvam u; atque ita deinceps; harum curvarum omnium longitudines notæ fierent; nam ut prior $z = \frac{xx}{2r}$; ita ſecunda t eſſet $= \frac{x^3}{6r^2}$, & tertia $u = \frac{x^4}{24r^3}$; atque

ita

ita deinceps, numeris 2. 6. 24, & reliquis ex mutua numerorum, ordine naturali creſcentium, multiplicatione (ut in Tabula Combinatoria) deductis, nempe 1. 2; 1. 2. 3; 1. 2. 3. 4; 1. 2. 3. 4. 5; &c. Trilinea verò hiſce curvis interiecta, ita ſe habebunt, ut ſicut primum $= \frac{x^3}{6r}$, ita ſequens foret $= \frac{x^5}{40r^3}$; & huic ſuccedens $= \frac{x^7}{564r^5}$ & ita deinceps; aut [quò melius ſeries innoteſcat poſita diametro $= 2r = a$] Ut primum trilineum $= \frac{x^3}{3a}$; ita ſecundum $= \frac{22x}{5a}$; & tertium $= \frac{ttx}{7a}$, & quartum $= \frac{uux}{9a}$ & ita ſemper, ut liquet, eodē ratiocinio rem hanc expēdendo.

49. Cum autem in argumenti hujus progreſſu, & ſimilibus arguendi modis, recta E F ſumpta ſit velut æqualis E B, & ſector E F e velut i[d]em cum ſpatio E B b e, quaſi ac punctum F caderet in b, manifeſtum eſt id legitimè factum fuiſſe ex methodi infiniteſimalis præſcripto, abſque eo quod angulus B C b, vel E F e unquam æqualis ſuppoſitus fuerit angulo contactus B b F, ita ut *magnitudine* quidem ſpatium E B b e velutì æquivalens, & congruens ſectori E F e ſumptum fuerit; ſed non *forma*, aut *ſpecie figuræ*: Quod ipſum in aliis exemplis contingere nemo ignorat; nec ipſe quidem Varignonius id paſſim uſuvenire diffitebitur; qui etiam, ut ſpero, conatibus noſtris, veritatis illuſtrandæ ſtudio ſuſceptis veniam indulgere non dedignabitur; & tum calami ſui doctiſſimi operā utilioribus veritatibus detegendis applicabit, tum me pariter, ejus doctrinæ non ultimum admiratorem, aliis ſpeculationibus, quas præ manibus habeo, quantulicumque ſint pretii, perficiendis bonas horas potius inſumere, quam in hiſce tricis [majori cum lectorum tædio, quam fructu] ulterius verſandis deinceps collocare permittet.

FINIS

Digitized by Google